Une équation fonctionnelle

Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation :
$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$

1. Déterminer les solutions constantes
2. Soit f une solution non constante.
   Montrer que $f(0)=1$ et que $f'(0)=0$.
3. Soit encore f une solution non constante.
   On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $F(x,y)=f(x+y)+f(x-y)$.

3.a Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

3.b Calculer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ de deux façons.

3.c En déduire que f vérifie une équation différentielle de la forme $f''-\alpha f=0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Déterminer toutes les solutions de l'équation étudiée.